Многомерный комплексный анализ 30.09.2011

1. Обозначим через X риманову поверхность, заданную уравнением $w^2 = z^3 - z$. Убедитесь в том, что $\omega = dz/w$ является голоморфной 1-формой на X. Найдите замкнутые пути γ_+ и γ_- на X, проходящие через точку $(i, -1+i) \in X$, чьими образами относительно проекции $(z, w) \mapsto z$ являются положительно ориентированные окружности $|2z \pm 1| = \sqrt{5}$. Вычислите $\int\limits_{\gamma_+} \omega$ и $\int\limits_{\gamma_+} \omega$.

2. Обозначим через $X \subset \mathbb{P}^2$ компактную риманову поверхность, заданную в $\mathbb{C}^2$ уравнением $w^2 = z^3 - z$. Покажите, что z и w можно считать мероморфными функциями на X и найдите их дивизоры. Сделайте то же самое для 1-форм dz и dw.

3. Пусть комплексное подмногообразие $X \subset \mathbb{P}^2$ задано в однородных координатах (z_0, z_1, z_2) уравнением $z_0^3 + z_1^3 + z_2^3 + 3az_0z_1z_2 = 0$. Для каких значений параметра a подмногообразие X имеет особенности? Найдите все точки X, в которых касательная прямая имеет порядок касания, равный 3. Покажите, что если некоторая прямая проходит через две такие точки, то она должна содержать и третью точку, обладающую этим свойством.